Über

gewisse partielle Differentialgleichungen höherer Ordnung.

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung

der philosophischen Doctorwürde,

welche

mit Genehmigung der hohen philosophischen Facultät

der

Vereinigten Friedrichs-Universität Halle-Wittenberg

zugleich mit den angehängten Thesen

den 13. Januar 1893 um 12 Uhr

öffentlich verteidigen wird

August Gutzmer

aus Neu-Rodahn.

ACAD. LUGD. BAT. BIBL.

Opponenten:

Herr P. Stäckel, Dr. phil.

Herr E. Koebke, Dr. phil.

Halle a. S.

1893.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548112_0144

In seiner Abhandlung »*Mémoire sur l'équation aux différences partielles du quatrième ordre* $\Delta\Delta u = 0$ *et sur l'équilibre d'élasticité d'un corps solide*« *(Journal de Mathématiques pures et appliquées, 2. série, t. XIV, p. 378—421; 1869. S. a. Théorie du potentiel et ses applications à l'électrostatique et au magnétisme, p. 77—84)* hat sich Émile Mathieu mit der Differentialgleichung

$$\Delta\Delta u = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial z^2} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial y^2 \partial z^2} = 0$$

beschäftigt, welche aus der Laplace'schen Differentialgleichung

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

dadurch hervorgeht, dass man die linke Seite derselben nochmals der durch die Charakteristik Δ angedeuteten Operation unterzieht. Der genannte Mathematiker hat bei dieser Gelegenheit die Eigenschaften des zweiten Potentials*) untersucht; es wird damit eine Function der Variablen x, y, z bezeichnet, welche der Gleichung

$$\Delta\Delta w = 0$$

genügt, falls der Punkt (x, y, z) sich ausserhalb einer in einem Raume ω verteilten Masse befindet, welche dagegen die Gleichung

$$\Delta\Delta w = -8\pi\varphi(x, y, z)$$

für im Innern der Masse gelegene Punkte (x, y, z) befriedigt. $\varphi(x, y, z)$ bezeichnet die Dichtigkeit der Masse. Besonders eingehend hat sich Mathieu mit dem Falle beschäftigt, in welchem u nur von zwei Veränderlichen abhängt.

*) Der Begriff „zweites Potential" findet sich, wie ich einer gütigen Mitteilung des Herrn Wangerin verdanke, schon bei Lamé.

Wie der Verfasser der folgenden Zeilen bereits vor längerer Zeit nachgewiesen hat (S. *Journal de Mathématiques pures et appliquées, 4e série, t. VI, p. 405—422; Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas, t. X, p. 3—12; Sitzungsberichte der Königl. Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften, 1892, p. 54—59*), lassen sich die Ergebnisse der Mathieu'schen Untersuchung zum Teil verallgemeinern oder unter anderen Gesichtspunkten betrachten; es sei gestattet, dies im Folgenden zusammenfassend darzustellen, indem wir uns die Darlegung einer eingehenderen Untersuchung des behandelten Gegenstandes für eine andere Gelegenheit vorbehalten.

---

1. Wir beschäftigen uns zunächst mit dem Ausdruck

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Wenden wir auf denselben die Operation Δ an, so erhalten wir:

$$\Delta^2 u = \Delta(\Delta u) = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4};$$

in derselben Weise folgt:

$$\Delta^3 u = \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + 3\frac{\partial^6 u}{\partial x^4 \partial y^2} + 3\frac{\partial^6 u}{\partial x^2 \partial y^4} + \frac{\partial^6 u}{\partial y^6}.$$

Fahren wir in dieser Weise fort, so finden wir allgemein, wie leicht durch Induction zu beweisen ist:

$$\Delta^n u = \frac{\partial^{2n} u}{\partial x^{2n}} + \binom{n}{1}\frac{\partial^{2n} u}{\partial x^{2n-2}\partial y^2} + \binom{n}{2}\frac{\partial^{2n} u}{\partial x^{2n-4}\partial y^4} + \cdots + \binom{n}{n-1}\frac{\partial^{2n} u}{\partial x^2 \partial y^{2n-2}} + \frac{\partial^{2n} u}{\partial y^{2n}}.$$

2. Bekanntlich wird die Gleichung

$$\Delta u = 0$$

durch $u = \log \frac{1}{r}$ und also auch durch

$$u_0 = \log \frac{1}{r} + 1$$

befriedigt, wo

$$r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2$$

gesetzt ist. Mathieu hat nun gefunden, dass die Function

$$u_1 = r^2 \log \frac{1}{r} + r^2$$

der Gleichung

$$\Delta u_1 = 4 \log \frac{1}{r} = 4 u_0 - 4$$

und folglich auch der Gleichung

$$\Delta^2 u_1 = 0$$

genügt.

Es ergiebt sich nun leicht, dass

$$u_2 = r^2 u_1 = r^4 u_0 = r^4 \log \frac{1}{r} + r^4$$

die Gleichung

$$\Delta^3 u = 0$$

erfüllt. Denn es folgt:

$$\begin{aligned} \Delta\ u_2 &= 16 u_1 - 8 r^2, \\ \Delta^2 u_2 &= 64 u_0 - 96, \\ \Delta^3 u_2 &= 0. \end{aligned}$$

Betrachtet man nun allgemein die Function

$$u_\lambda = r^{2\lambda} \left(\log \frac{1}{r} + 1 \right),$$

so findet man ohne Mühe

$$\begin{aligned} \Delta\ u_\lambda &= 2^2 \lambda^2 u_{\lambda-1} - 2^2 \lambda r^{2\lambda-2}, \\ \Delta^2 u_\lambda &= 2^4 \left[\frac{\lambda!}{(\lambda-2)!} \right]^2 u_{\lambda-2} - 2^4 \left[\frac{\lambda!}{(\lambda-2)!} \right]^2 \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda-1} \right) r^{2\lambda-4}, \\ \Delta^3 u_\lambda &= 2^6 \left[\frac{\lambda!}{(\lambda-3)!} \right]^2 u_{\lambda-3} - 2^6 \left[\frac{\lambda!}{(\lambda-3)!} \right]^2 \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda-1} + \frac{1}{\lambda-2} \right) r^{2\lambda-6}, \end{aligned}$$

und allgemein

$$\Delta^\nu u_\lambda = 2^{2\nu}\left[\frac{\lambda!}{(\lambda-\nu)!}\right]^2 u_{\lambda-\nu} - 2^{2\nu}\left[\frac{\lambda!}{(\lambda-\nu)!}\right]^2 \sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{1}{\lambda-k}\cdot r^{2(\lambda-\nu)}.$$

Man erkennt unmittelbar, dass $\Delta^\lambda u_\lambda$ die Form

$$\Delta^\lambda u_\lambda = \mathrm{A}\, u_0 + \mathrm{B}$$

haben wird, wo A und B Constanten bedeuten, und dass somit u_λ eine Lösung der Gleichung

$$\Delta^{\lambda+1} u_\lambda = 0$$

darstellt. Da $u_0, u_1, \ldots, u_{\lambda-1}$ bereits ähnlichen Gleichungen von niedrigerer Ordnung genügen, so werden diese Functionen die letztere Gleichung identisch erfüllen. Daraus ist klar, dass die Gleichung

$$\Delta^n u = 0$$

auch die Lösung

$$\begin{aligned} u &= u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} \\ &= \left(\log\frac{1}{r} + 1\right)(r^0 + r^1 + \cdots + r^{2(n-1)}), \end{aligned}$$

oder allgemeiner die Lösung

$$u = g_{n-1}(r^2) + \log\frac{1}{r}\cdot h_{n-1}(r^2)$$

besitzt; dabei bezeichnen g_{n-1} und h_{n-1} zwei ganze Functionen des Grades $n-1$ mit beliebigen constanten Coeffizienten.

3. Es mögen

$$\varphi_0(a, b), \qquad \varphi_1(a, b), \qquad \ldots, \qquad \varphi_{n-1}(a, b)$$

n Functionen der Coordinaten (a, b) eines Punktes bezeichnen, der im Innern eines von einer geschlossenen Curve begrenzten Gebietes ω der Ebene gelegen ist; von den Functionen φ_i werde angenommen, dass sie für alle ausserhalb ω gelegenen Punkte verschwinden. Betrachtet man dann die Ausdrücke:

$$v_1 = \int u_0 \varphi_0 (a, b)\, d\omega,$$
$$v_2 = \int u_1 \varphi_1 (a, b)\, d\omega,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$v_n = \int u_{n-1} \varphi_{n-1} (a, b)\, d\omega,$$

in denen die Integration über alle Elemente von ω zu erstrecken ist, so ist klar, dass allgemein die Function

$$v_\lambda = \int u_{\lambda-1} \varphi_{\lambda-1} (a, b)\, d\omega = \int r^{2(\lambda-1)} \left(\log \frac{1}{r} + 1 \right) \varphi_{\lambda-1} (a, b)\, d\omega$$

der Gleichung

$$\Delta^\lambda v_\lambda = 0 \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots)$$

Genüge leistet, wenn der Punkt (x, y) sich ausserhalb ω befindet. Setzt man also

$$V = v_1 + v_2 + \cdots + v_n,$$

so besteht die Gleichung

$$\Delta^n V = 0.$$

Befindet sich dagegen der Punkt (x, y) im Innern von ω, so ist bekanntlich

$$\Delta v_1 = -2\pi\varphi (x, y).$$

Benutzt man nun die zwischen den u_λ bestehenden Relationen (s. Nr. 2), so ist allgemein

$$\Delta v_2 = 4 v_1^{(1)} - 4 \int \varphi_1 (a, b)\, d\omega,$$

wo $v_1^{(1)}$ der durch Substitution von $\varphi_1 (a, b)$ für $\varphi_0 (a, b)$ aus v_1 folgende Wert ist. Mittels der vorhergehenden Gleichung kann man also schliessen, dass für einen inneren Punkt die Gleichung

$$\Delta^2 v_2 = -8\pi\varphi_1 (x, y)$$

besteht.

Fährt man in dieser Betrachtungsweise fort, so ergiebt sich, dass für einen innerhalb ω gelegenen Punkt

$$\Delta^\lambda v_\lambda = -2^{2\lambda-1}[(\lambda-1)!]^2\,\pi\varphi_{\lambda-1}(x,y)$$

ist, eine Gleichung, welche der Poisson'schen entspricht. Die Summe V genügt offenbar der Gleichung

$$\Delta^n V = -\pi\sum_{\lambda=1}^{n} 2^{2\lambda-1}[(\lambda-1)!]^2\,\Delta^{n-\lambda}\varphi_{\lambda-1}(x,y),$$

wo $\Delta^0 u = u$ ist.

Wie Mathieu es für den Fall $n=2$ gethan hat, könnte man allgemein diesen Functionen v^λ einen physikalischen Sinn unterlegen und v_1, v_2, ..., v_n als erstes, zweites, ..., $n$tes Potential von n Massenschichten bezeichnen, die bezw. mit der Dichtigkeit φ_0, φ_1, ..., φ_{n-1} über ω ausgebreitet sind, und welche nach Gesetzen wirken, die aus den Functionen u_0, u_1, ..., u_{n-1} zu finden sind. Uebrigens sei bemerkt, dass der hier gegebene Ausdruck für das Potential v_1 sich von dem gewöhnlichen logarithmischen Potential um die Constante $M = \int \varphi_0(a,b)\,d\omega$, der Masse einer über ω mit der Dichtigkeit φ_0 ausgebreiteten materiellen Schicht, unterscheidet.

Auf die Stetigkeitsbedingungen, denen man diese Functionen unterwerfen muss, damit die Operationen nicht ihren Sinn verlieren, gehen wir an dieser Stelle nicht ein.

4. Betrachten wir jetzt den Fall, wo u eine Function der drei Veränderlichen x, y, z ist, so folgt aus

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

durch Wiederholung der Operation Δ:

$$\Delta^2 u = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\,\partial y^2} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\,\partial z^2} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial y^2\,\partial z^2},$$

$$\Delta^3 u = \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + \frac{\partial^6 u}{\partial y^6} + \frac{\partial^6 u}{\partial z^6} + 3\frac{\partial^6 u}{\partial x^4\,\partial y^2} + 3\frac{\partial^6 u}{\partial x^4\,\partial z^2} + 3\frac{\partial^6 u}{\partial y^4\,\partial z^2} + 3\frac{\partial^6 u}{\partial x^2\,\partial y^4}$$
$$+ 3\frac{\partial^6 u}{\partial x^2\,\partial z^4} + 3\frac{\partial^6 u}{\partial y^2\,\partial z^4} + 6\frac{\partial^6 u}{\partial x^2\,\partial y^2\,\partial z^2},$$

und allgemein:

$$\Delta^n u = \sum_{\substack{\lambda,\,\mu,\,\nu=0 \\ (\lambda+\mu+\nu=n)}}^{n} \frac{n!}{\lambda!\,\mu!\,\nu!} \frac{\partial^{2n} u}{\partial x^{2\lambda}\,\partial y^{2\mu}\,\partial z^{2\nu}}.$$

Setzt man

$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2,$$

so genügt

$$u_0 = \frac{1}{r} + 1$$

der Gleichung $\Delta u = 0$. Betrachtet man nun in Analogie mit dem in Nr. 2 behandelten Falle die Function

$$u_1 = r^2 u_0 = r^2 \left(\frac{1}{r} + 1\right),$$

so folgt

$$\Delta u_1 = \frac{2}{r} + 6 = 2u_0 + 4,$$

also

$$\Delta^2 u_1 = 0.$$

Und allgemein ergeben sich für die Function

$$u_\lambda = r^{2\lambda} \left(\frac{1}{r} + 1\right)$$

die Beziehungen:

$$\begin{aligned}
\Delta u_\lambda &= 2\lambda\,(2\lambda-1)\,u_{\lambda-1} + 2\cdot 2\lambda\, r^{2\lambda-2}, \\
\Delta^2 u_\lambda &= 2\lambda\,(2\lambda-1)\,(2\lambda-2)\,(2\lambda-3)\,u_{\lambda-2} + 2\cdot 2\cdot 2\lambda\,(2\lambda-1)\,(2\lambda-2)\,r^{2\lambda-4}, \\
\Delta^3 u_\lambda &= 2\lambda\,(2\lambda-1)\ldots(2\lambda-5)\,u_{\lambda-3} + 2\cdot 3\cdot 2\lambda\,(2\lambda-1)\ldots(2\lambda-4)\,r^{2\lambda-6}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\Delta^\nu u_\lambda &= \frac{(2\lambda)!}{(2\lambda-2\nu)!} u_{\lambda-\nu} + 2\nu\,\frac{(2\lambda)!}{(2\lambda-2\nu+1)!}\, r^{2\lambda-2\nu}.
\end{aligned}$$

Man schliesst aus dieser Gleichung unmittelbar, dass

$$\Delta^\lambda u_\lambda = (2\lambda)!\,u_0 + 2\lambda\,(2\lambda)!$$

ist, und folglich genügt die Function u_λ der Gleichung

$$\Delta^{\lambda+1} u_\lambda = 0.$$

In derselben Weise wie in Nr. 2 erschliesst man auch hier, dass

$$u = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$$
$$= \frac{1}{r} + 1 + r + r^2 + \cdots + r^{2n-3} + r^{2n-2}$$

oder allgemeiner

$$u = g_{n-1}(r^2) + \frac{1}{r} h_{n-1}(r^2),$$

wo g_{n-1} und h_{n-1} dieselbe Bedeutung haben wie in Nr. 2, der Gleichung

$$\Delta^n u = 0$$

genügt.

5. Bezeichnen nun $\varphi_0(a, b, c)$, $\varphi_1(a, b, c), \ldots, \varphi_{n-1}(a, b, c)$ n Functionen der Coordinaten eines Punktes, der innerhalb eines räumlichen Gebietes ω gelegen ist, und wird angenommen, dass diese Functionen für Punkte des Aeusseren von ω verschwinden, so lässt sich leicht beweisen, dass die über alle Elemente von ω erstreckten Integrale

$$v_1 = \int u_0 \varphi_0(a, b, c)\, d\omega,$$
$$v_2 = \int u_1 \varphi_1(a, b, c)\, d\omega,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$v_n = \int u_{n-1} \varphi_{n-1}(a, b, c)\, d\omega$$

bezw. die Gleichungen

$$\Delta v_1 = 0, \qquad \Delta^2 v_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \Delta^n v_n = 0$$

erfüllen, falls der Punkt (x, y, z) sich ausserhalb des Gebietes ω befindet; ebenso wird die Summe $V = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$ die Gleichung $\Delta^n u = 0$ für einen äusseren Punkt befriedigen. Im entgegengesetzten Falle erhält man, wenn man von der Poisson'schen Gleichung

$$\Delta v_1 = -4\pi\varphi_0(x, y, z)$$

ausgeht und den Ausdruck für $\Delta^\nu u_\lambda$ (Nr. 4) benutzt,

$$\Delta^2 v_2 = -8\pi\varphi_1(x, y, z),$$

und allgemein

$$\Delta^\lambda v_\lambda = -(2\lambda-2)!\,4\pi\varphi_{\lambda-1}(x,y,z).$$

Es wird demnach V für innere Punkte der Gleichung

$$\Delta^n V = -4\pi\sum_{\lambda=1}^{n}(2\lambda-2)!\,\Delta^{n-\lambda}\varphi_{\lambda-1}(x,y,z)$$

genügen. Jede der Functionen $v_1, v_2, \ldots, v_n$, die man als erstes, zweites, ..., $n$tes Potential bezeichnen kann, besteht aus zwei Teilen; in dem einen ist der Exponent von r grade, im anderen ungrade. Uebrigens unterscheidet sich die hier gegebene Definition für den Fall $n=2$ etwas von der Mathieu's; v_1 ist um die Constante $M=\int\varphi_0(a,b,c)\,d\omega$ von dem Newton'schen Potential verschieden.

6. Dieselben Betrachtungen, welche soeben für die beiden Fälle, wo u von zwei oder drei Veränderlichen abhängt, angewendet worden sind, können auch in dem allgemeinen Falle angestellt werden, wo u eine Function von ρ Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_\rho$ ist. Bekanntlich genügt die Function

$$u=\frac{1}{r^{\rho-2}},$$

wo

$$r^2=\sum_{i=1}^{\rho}(x_i-a_i)^2$$

ist, der Gleichung

$$\Delta u=\sum_{i=1}^{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}=0.$$

Ein näheres Eingehen auf diesen allgemeinen Fall lässt erkennen, dass die Fälle, in denen ρ eine grade oder eine ungrade Zahl ist, wesentlich verschieden sind.

In dem letzteren Falle kann man

$$u_0=\frac{1}{r^{\rho-2}}+1,$$

$$u_1=r^2\left(\frac{1}{r^{\rho-2}}+1\right),$$

$$u_2=r^4\left(\frac{1}{r^{\rho-2}}+1\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$u_\lambda=r^{2\lambda}\left(\frac{1}{r^{\rho-2}}+1\right)$$

ansetzen, und man sieht leicht, dass diese Ausdrücke bezw. die Gleichungen

$$\Delta u_0 = 0, \qquad \Delta^2 u_1 = 0, \qquad \Delta^3 u_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \Delta^{\lambda+1} u_\lambda = 0$$

erfüllen, so dass

$$u = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$$

oder allgemeiner

$$u = g_{n-1}(r^2) + \frac{1}{r^{\rho-2}} h_{n-1}(r^2),$$

wo g_{n-1} und h_{n-1} zwei ganze Functionen des Grades $(n-1)$ bedeuten, eine Lösung der Gleichung

$$\Delta^n u = 0$$

darstellt.

Mit Hülfe dieser Functionen u_λ kann man wieder Ausdrücke bilden, die den in Nr. 3 und Nr. 5 betrachteten entsprechen, und welche man wieder als Potentiale verschiedener Ordnung bezeichnen kann.

Ist aber ρ eine grade Zahl, etwa

$$\rho = 2\sigma,$$

so überzeugt man sich leicht, dass ungrade Potenzen von r keine Lösung bilden können, weil sie sich successive auf r, $\frac{1}{r}$, $\frac{1}{r^3}$, $\ldots$, $\frac{1}{r^{\rho-3}}$, $\frac{1}{r^{\rho-1}}$, $\ldots$ reduciren würden, also sicher nicht der Gleichung $\Delta u = 0$ genügen. Es macht nun keine Schwierigkeit zu erkennen, dass die Functionen

$$\begin{aligned}
u_0 &= \frac{1}{r^{2\sigma-2}} + 1, \\
u_1 &= r^2 \left(\frac{1}{r^{2\sigma-2}} + 1 \right), \\
u_2 &= r^4 \left(\frac{1}{r^{2\sigma-2}} + 1 \right), \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
u_{\sigma-2} &= r^{2\sigma-4} \left(\frac{1}{r^{2\sigma-2}} + 1 \right)
\end{aligned}$$

bezw. den Gleichungen

$$\Delta u_0 = 0, \qquad \Delta^2 u_1 = 0, \qquad \Delta^3 u_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \Delta^{\sigma-1} u_{\sigma-2} = 0$$

genügen. Sucht man nun aber eine analoge Function u_λ, welche der Gleichung

$$\Delta^{\lambda+1} u_\lambda = 0, \qquad \lambda > \sigma - 2$$

genügt, so erweist es sich als notwendig, die Function $\log \frac{1}{r}$ einzuführen. In der That weist man leicht nach, dass die Functionen

$$\begin{aligned}
u_{\sigma-1} &= \log \frac{1}{r} + r^{2\sigma-2}, \\
u_\sigma &= r^2 \left(\log \frac{1}{r} + r^{2\sigma-2} \right), \\
u_{\sigma+1} &= r^4 \left(\log \frac{1}{r} + r^{2\sigma-2} \right), \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
u_{\sigma+\lambda} &= r^{2\lambda+2} \left(\log \frac{1}{r} + r^{2\sigma-2} \right)
\end{aligned}$$

bezw. die Gleichungen

$$\Delta^\sigma u_{\sigma-1} = 0, \qquad \Delta^{\sigma+1} u_\sigma = 0, \qquad \Delta^{\sigma+2} u_{\sigma+1} = 0, \qquad \ldots, \qquad \Delta^{\sigma+\lambda+1} u_{\sigma+\lambda} = 0$$

befriedigen.

Die Gleichung

$$\Delta^n u = 0$$

besitzt also für den Fall, dass ρ eine grade Zahl ist, $\rho = 2\sigma$, und dass $n > \sigma - 1$, etwa $n = \sigma - 1 + \nu$ ist, die Lösung

$$u = u_0 + u_1 + \cdots + u_{\sigma-2} + u_{\sigma-1} + u_\sigma + \cdots + u_{n-1},$$

welche $\nu = n + 1 - \sigma = n - \frac{\rho - 2}{2}$ logarithmische Ausdrücke enthält, also auch die allgemeinere Lösung

$$u = \frac{1}{r^{2\sigma-2}} g_{n+\sigma-2}(r^2) + \log \frac{1}{r} \cdot h_{n-\sigma}(r^2),$$

wo g und h zwei ganze Functionen des durch den Index angegebenen Grades bedeuten. Für $\rho = 2$ oder $\sigma = 1$ stimmt dieses Resultat mit dem in Nr. 2 gefundenen überein. Die Eigenschaften der Potentiale höherer Ordnung, die man mit Hülfe dieser Functionen u_λ bilden kann, ergeben sich aus den obigen Formeln unmittelbar.

7. Das in Nr. 6 gefundene Ergebnis lautet dahin, dass die Gleichung

$$\Delta^n u = 0, \tag{1}$$

wo u eine Function von ρ Veränderlichen ist, das Integral

$$u = g_{n-1}(r^2) + \frac{1}{r^{\rho-2}} h^{n-1}(r^2) \tag{2}$$

oder

$$u = \frac{1}{r^{2\sigma-2}} g_{n+\sigma-2}(r^2) + \log \frac{1}{r} h_{n-\sigma}(r^2) \tag{3}$$

besitzt, je nachdem ρ eine ungrade oder eine grade Zahl ist; es ist ferner ersichtlich, dass dieses Integral $2n$ willkürliche Constanten enthält.

Es lässt sich nun zeigen, dass die Ausdrücke (2) und (3) die allgemeinsten Functionen von r sind, welche der Gleichung (1) genügen.

Setzen wir nämlich voraus, dass u von x und y nur in der durch r gegebenen Verbindung abhängt, so transformirt sich die Gleichung

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0$$

leicht in eine homogene lineare Differentialgleichung

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{\rho - 1}{r} \frac{du}{dr} = 0. \tag{4}$$

Durch Iteration der durch Δ ausgedrückten Operation erhält man $\Delta^2 u = 0$ oder

$$\frac{d^4 u}{dr^4} + 2\frac{\rho-1}{r}\frac{d^3 u}{dr^3} + \frac{(\rho-1)(\rho-3)}{r^2}\frac{d^2 u}{dr^2} - \frac{(\rho-1)(\rho-3)}{r^3}\frac{du}{dr} = 0.$$

Auf dieselbe Weise ergiebt sich, dass $\Delta^3 u = 0$ die folgende Gestalt annimmt:

$$\begin{aligned}\frac{d^6 u}{dr^6} &+ 3\frac{\rho-1}{r}\frac{d^5 u}{dr^5} + 3\frac{(\rho-1)(\rho-3)}{r^2}\frac{d^4 u}{dr^4} \\ &+ \frac{(\rho-1)(\rho-3)(\rho-8)}{r^3}\frac{d^3 u}{dr^3} - 3\frac{(\rho-1)(\rho-3)(\rho-5)}{r^4}\frac{d^2 u}{dr^2} \\ &+ 3\frac{(\rho-1)(\rho-3)(\rho-5)}{r^5}\frac{du}{dr} = 0.\end{aligned}$$

Die Fortsetzung dieses Verfahrens lässt erkennen, dass die Gleichung $\Delta^n u = 0$ sich in eine lineare Differentialgleichung der Form

$$\frac{d^{2n}u}{dr^{2n}} + \frac{A_1}{r}\frac{d^{2n-1}u}{dr^{2n-1}} + \frac{A_2}{r^2}\frac{d^{2n-2}u}{dr^{2n-2}} + \cdots + \frac{A_{2n-1}}{r^{2n-1}}\frac{du}{dr} = 0$$

verwandelt, wo die Grössen A_i Constanten bedeuten, die nur von ρ abhängen, und dass diese Gleichung ein allgemeines Integral von der Form (2) oder (3) besitzt, je nachdem ρ eine ungrade oder eine grade Zahl ist.

Man kann den Beweis für diese Thatsache auf einfacherem Wege und ohne längere Rechnung führen, wenn man auf den vorliegenden Fall das von P. Günther *(Ueber die Bestimmung der Fundamentalgleichungen in der Theorie der linearen Differentialgleichungen, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 107, S. 298)* angegebene Verfahren anwendet. Die Gleichung (4) kann nämlich in der Form

$$r^{1-\rho}\frac{d}{dr}\left(r^{\rho-1}\frac{du}{dr}\right) = 0$$

geschrieben werden, so dass die iterirte Gleichung in

$$\Delta^n u = r^{1-\rho}\frac{d}{dr}r^{\rho-1}\frac{d}{dr}r^{1-\rho}\frac{d}{dr}r^{\rho-1}\frac{d}{dr}\cdots r^{1-\rho}\frac{d}{dr}r^{\rho-1}\frac{d}{dr}u = 0 \tag{5}$$

übergeht, wo die Operation

$$r^{1-\rho}\frac{d}{dr}r^{\rho-1}\frac{d}{dr}$$

n-mal angewendet ist.

Hat man aber allgemein die Gleichung

$$t^{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_m}\frac{d}{dt}t^{-\mu_1}\frac{d}{dt}t^{-\mu_2}\frac{d}{dt}\cdots\frac{d}{dt}t^{-\mu_m}\frac{d}{dt}y = 0,$$

so nimmt sie die Form

$$\frac{d^{m+1}y}{dt^{m+1}} + \frac{A_1}{t}\frac{d^m y}{dt^m} + \cdots + \frac{A_m}{t^m}\frac{dy}{dt} = 0$$

an, wie man aus dem Umstande erkennt, dass ihre linear unabhängigen Integrale

$$\begin{aligned} y_\alpha &= \int_1^t t^{\mu_m} dt \int_1^t \cdots \int_1^t t^{\mu_\alpha} dt, \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots, m), \\ y_{m+1} &= 1 \end{aligned}$$

nur die beiden singulären Punkte $t = 0$ und $t = \infty$ besitzen und daselbst nicht unbestimmt werden, denn es sind Ausdrücke vom Charakter F (Vgl. Fuchs, *Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 66, p. 155*), die für $t = 0$ bezw. zu den Exponenten

$$(6) \quad \begin{cases} p_\alpha = \mu_m + \mu_{m-1} + \cdots + \mu_\alpha + m - \alpha + 1 & (\alpha = 1, 2, \cdots m), \\ p_{m+1} = 0 \end{cases}$$

gehören. Diese Exponenten sind die Wurzeln der determinirenden Gleichung

$$p(p-1)\cdots(p-m) + A_1 p(p-1)\cdots(p-m+1) + \cdots + A_m p = 0,$$

und sie können dazu verwendet werden, um die Werte der Constanten A_i zu bestimmen.

In dem vorliegenden Falle der Gleichung $\Delta^n u = 0$ (5) ergiebt sich hiernach:

$$(7) \quad \begin{cases} m = 2n - 1, \\ p_{2i} = 2n - 2i, & (i = 1, 2, \ldots, n-1), \\ p_{2i+1} = 2n - \rho - 2i, & (i = 0, 1, \ldots, n-1), \\ p_{2n} = 0. \end{cases}$$

Ist nun ρ eine ungrade Zahl, so kann es sich niemals ereignen, dass zwei Wurzeln der determinirenden Gleichung einander gleich sind; die Gleichung $\Delta^n u = 0$ hat also die linear unabhängigen Integrale

$$u_\alpha = r^{p_\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, 2n).$$

Wenn dagegen ρ eine grade Zahl ist, so folgt, wenn man $2n = \rho + 2h$ setzt:

$$p_1 = p_{2n-2h}, \; p_3 = p_{2n-2h+2}, \; \cdots, \; p_{2h+1} = p_{2n},$$

und man kann ohne Schwierigkeit erkennen, dass keine anderen Gleichheitsbeziehungen zwischen diesen Wurzeln stattfinden. Nach den Prinzipien

der Theorie der linearen Differentialgleichungen ist demnach zu schliessen, dass die Integrale

$$r^{p_{2n-2h}},\ r^{p_{2n-2h+2}},\ \ldots,\ r^{p_{2n}}$$

durch die folgenden ersetzt werden müssen:

$$r^{p_1}\log r,\ r^{p_3}\log r,\ \ldots,\ r^{p_{2h+1}}\log r.$$

Berücksichtigt man die Ausdrücke (7), so sieht man ohne Mühe, dass das allgemeine Integral der Gleichung (1) die Form (2) oder (3) hat, je nachdem ρ eine ungrade oder eine grade Zahl ist. Damit ist bewiesen, dass diese Ausdrücke in der That die allgemeinsten Functionen von r darstellen, welche die Gleichung $\Delta^n u = 0$ befriedigen.

8. Man kann das in der vorigen Nummer erhaltene Resultat leicht verallgemeinern (S. des Verfassers »*Remarque sur certaines équations différentielles*«, *Jornal de Sciencias Mathematicas et Astronomicas, t. X, 1891, p. 3—12*). Nimmt man nämlich an, dass u eine Function der Grösse v ist, wo v seinerseits von den unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_\rho$ abhängig ist, so nimmt die Gleichung

$$\Delta u = 0,$$

wie sich durch eine einfache Rechnung ergiebt, die Form

$$\nabla v \cdot \frac{d^2 u}{dv^2} + \Delta v \frac{du}{dv} = 0$$

an, wo

$$\nabla v = \sum_{i=1}^{\rho} \left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2, \qquad \Delta v = \sum_{i=1}^{\rho} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}$$

gesetzt ist. Wird nun v so bestimmt, dass ∇v und Δv bis auf einen gemeinsamen Factor nur von v abhängen, so geht die Laplace'sche Differentialgleichung in die lineare homogene Differentialgleichung

$$\varphi_1(v)\frac{d^2 u}{dv^2} + \psi_1(v)\frac{du}{dv} = 0$$

über. Die Integrale der aus dieser Gleichung durch Iteration hervorgehenden Differentialgleichungen höherer Ordnung (S. des Verfassers »*Bemerkungen über die Iteration linearer homogener Differentialgleichungen*«,

Sitzungsberichte der Königl. Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften, 1892, p. 54—59) stellen alsdann die nur von v abhängenden Lösungen der Differentialgleichungen $\Delta^n u = 0$ dar.

Die Bestimmung von v in der oben angegebenen Weise stösst aber in ihrer Allgemeinheit auf grosse Schwierigkeiten; es werde deshalb hier nur der sehr specielle Fall betrachtet, dass v selbst eine Function von r ist. In diesem Falle wird, wie leicht zu sehen,

$$\nabla v = \left(\frac{dv}{dr}\right)^2 = \varphi_1(v) = \varphi(r); \qquad v = \int \sqrt{\varphi(r)}\, dr,$$

und demnach

$$\Delta v = \frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{\rho - 1}{r} \frac{dv}{dr} = \psi_1(v) = \psi(r).$$

Man kann also entweder v oder eine der Functionen $\varphi(r)$ und $\psi(r)$ beliebig wählen, dann sind die beiden übrigen dieser Grössen vermöge der letzten Gleichungen bestimmt. Ist dies geschehen, so kann man zur Iteration der Gleichung

$$\frac{d^2 u}{dv^2} + \frac{\varphi(r)}{\psi(r)} \cdot \frac{du}{dv} = 0, \tag{1}$$

wo

$$r = \int \sqrt{\varphi(r)}\, dr$$

ist und $\psi(r)$ sich durch den obigen Ausdruck bestimmt, schreiten und auf diese Weise die Integrale der Gleichungen $\Delta^n u = 0$ bestimmen, welche von der allgemeinsten Function von r abhängt.

Besonders einfach gestaltet sich, wie aus Nr. 7 hervorgeht, diese Iteration, wenn man die Differentialgleichung auf die Form

$$v^\mu \frac{d}{dv} v^\lambda \frac{d}{dv} u = 0$$

bringen kann, da sich die Integrale alsdann fast ohne Rechnung ergeben. Es werde bestimmt, wann dies der Fall ist.

Aus der Vergleichung von

$$v^\mu \frac{d}{dv} v^\lambda \frac{d}{dv} u = v^{\mu+\lambda} \frac{d^2 u}{dv^2} + \lambda v^{\mu+\lambda-1} \frac{du}{dv} \qquad 0$$

mit (1) ergiebt sich, dass für die Ausführbarkeit der erwähnten Umformung

$$\lambda + \mu = 0$$

und

$$\frac{\lambda}{v} = \frac{\psi(r)}{\varphi(r)} = \frac{\dfrac{d^2 v}{dr^2} + \dfrac{\rho - 1}{r}\dfrac{dv}{dr}}{\left(\dfrac{dv}{dr}\right)^2}$$

sein muss. Durch eine einfache Rechnung ergiebt sich hieraus, dass v folgende Form haben muss:

Ist $\rho > 2$, so wird:

$$v = A\left(\frac{1}{r^{\rho-2}} + B\right)^{\frac{1}{1-\lambda}}, \qquad \text{falls } \lambda \neq 1,$$

$$v = A \cdot e^{B \cdot r^{2-\rho}} \qquad \text{„ } \lambda = 1;$$

Ist $\rho = 2$, so wird

$$v = A\,(\log r + B)^{\frac{1}{1-\lambda}} \qquad \text{„ } \lambda \neq 1,$$

$$v = A \cdot r^B \qquad \text{„ } \lambda = 1$$

ist, wo A und B Constanten sind. Wählt man für v einen dieser Ausdrücke, so kann man die Iterationen bilden und leicht die Integrale derselben bestimmen; und da die linearen Differentialgleichungen, zu denen man auf diese Weise gelangt, nur die Punkte 0 uud ∞ als singuläre Stellen besitzen, so bietet die Bestimmung dieser Integrale keine wesentlichen Schwierigkeiten.

Es möge dies an einem Beispiele durchgeführt werden; es werde angenommen, dass

$$v = r^p$$

ist. Dann ist $\lambda = \dfrac{p + \rho - 2}{p}$, und die Differentialgleichung lautet

$$\frac{d^2 u}{dv^2} + \frac{p + \rho - 2}{pv}\frac{du}{dv} = 0.$$

Diese lässt sich in die Form

$$v^{-\frac{(p+\rho-2)}{p}}\frac{d}{dv}v^{\frac{p+\rho-2}{p}}\frac{d}{dv}u = 0$$

setzen. Führt man die hier angedeutete Operation n-mal aus:

$$v^{-\frac{p+\rho-2}{p}}\frac{d}{dv}v^{\frac{p+\rho-2}{p}}\frac{d}{dv}\cdots v^{-\frac{p+\rho-2}{p}}\frac{d}{dv}v^{\frac{p+\rho-2}{p}}\frac{d}{dv}v^{-\frac{p+\rho-2}{p}}\frac{d}{dv}v^{\frac{p+\rho-2}{p}}\frac{d}{dv}u=0,$$

so wird man auf eine lineare homogene Differentialgleichung geführt, deren Integrale nicht unbestimmt werden und nur die beiden singulären Punkte $v=0$ und $v=\infty$ besitzen.

Die Wurzel der determinirenden Gleichung derselben werden in diesem Falle (vgl. Nr. 7 Gleichungen (6)) die Werte besitzen:

$$p_{2i}=2n-2i \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$
$$p_{2i+1}=2n-2i-2-\frac{\rho-2}{p} \qquad (i=0,1,\ldots,n-1).$$

Ist nun $\frac{\rho-2}{p}$ keine ganze Zahl oder eine ungrade Zahl oder aber eine grade Zahl von der Beschaffenheit, dass $2n<2+\frac{\rho-2}{p}$ ist, so können keine Gleichheitsbeziehungen zwischen den Wurzeln stattfinden; die iterirte Gleichung hat also in diesem Falle die linear unabhängigen Integrale

$$v^{p_\alpha} \text{ oder } r^{p\cdot p_\alpha} \qquad (\alpha=1,2,\ldots,2n).$$

Wenn aber $\frac{\rho-2}{p}$ eine grade Zahl (dies ist nur möglich, wenn ρ selbst eine grade Zahl ist) von der Beschaffenheit ist, dass $2n\geqq 2+\frac{\rho-2}{p}$ ist, etwa $2n=2+\frac{\rho-2}{p}+2h$, so müssen die Integrale

$$v^{p_{2n-2\lambda}} \qquad (\lambda=0,1,\ldots,h)$$

durch

$$v^{p_{2\lambda+1}}\cdot\log v \qquad (\lambda=0,1,\ldots,h)$$

oder also durch

$$r^{p\cdot p_{2\lambda+1}}\log r \qquad (\lambda=0,1,\ldots,h)$$

ersetzt werden. Man sieht, dass dieses Ergebnis für $p=1$ mit dem in den vorhergehenden Nummern erhaltenen Resultat übereinstimmt. In ähnlicher Weise kann man in den übrigen Fällen verfahren und die Integrale, speciell auch die logarithmischen Fälle, ermitteln.

9. Bedeuten U und V zwei Functionen der Coordinaten der Punkte eines Raumes ω, der von σ begrenzt wird, und dessen nach innen gerichtete Normale mit n bezeichnet wird, so gilt für U und V bekanntlich der Green'sche Satz:

$$(1) \qquad \int (U\,\Delta V - V\,\Delta U)\,d\omega = \int \left(V\,\frac{\partial U}{\partial n} - U\,\frac{\partial V}{\partial n} \right) d\sigma.$$

Wie die Herren C. Neumann *(Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. XII, 1867)* und Beltrami *(Memoire dell' Accademia di Bologna, 2. serie, t. VIII, 1868)* gezeigt haben, gilt die Formel (1) auch noch, falls ω einen ρ-dimensionalen Raum bezeichnet, der von einem $(\rho - 1)$-dimensionalen Gebiete σ begrenzt wird. Man kann noch weiter verallgemeinern.

Ersetzt man nämlich in (1) einmal U durch ΔU und dann V durch ΔV, so erhält man

$$\int (\Delta U\,\Delta V - V\Delta^2 U)\,d\omega = \int \left(V\,\frac{\partial \Delta U}{\partial n} - U\,\frac{\partial V}{\partial u} \right) d\sigma$$

und

$$\int (U\Delta^2 V - \Delta U\,\Delta V)\,d\omega = \int \left(\Delta V\,\frac{\partial U}{\partial n} - \frac{\partial\,\Delta V}{\partial n} \right) d\sigma.$$

Die Addition dieser beiden Gleichungen ergiebt die bereits von Mathieu angegebene Formel

$$(2) \quad \int (U\,\Delta^2 V - V\Delta^2 U)\,d\omega = \int \left(V\,\frac{\partial \Delta U}{\partial n} - U\,\frac{\partial \Delta V}{\partial n} \right) d\sigma + \int \left(\Delta V\,\frac{\partial U}{\partial n} - \Delta U\,\frac{\partial V}{\partial n} \right) d\sigma.$$

Ersetzt man nun in (2) zunächst V durch ΔV, so kommt

$$\int (U\,\Delta^3 V - \Delta V\,\Delta^2 U)\,d\omega = \int \left(\Delta V\,\frac{\partial \Delta U}{\partial n} - U\,\frac{\partial \Delta^2 V}{\partial n} \right) d\sigma + \int \left(\Delta^2 V\,\frac{\partial U}{\partial n} - \Delta U\,\frac{\partial \Delta V}{\partial n} \right) d\sigma,$$

und wird ebenso in (2) U durch ΔU ersetzt, so folgt:

$$\int (\Delta U\,\Delta^2 V - V\Delta^3 U)\,d\omega = \int \left(V\,\frac{\partial \Delta^2 U}{\partial n} - \Delta U\,\frac{\partial \Delta V}{\partial n} \right) d\sigma + \int \left(\Delta V\,\frac{\partial \Delta U}{\partial n} - \Delta^2 U\,\frac{\partial V}{\partial n} \right) d\sigma.$$

Durch Addition dieser beiden Gleichungen erhält man die Formel:

$$\int (U\,\Delta^3 V - V\Delta^3 U)\,d\omega + \int (\Delta U\,\Delta^2 V - \Delta V\,\Delta^2 U)\,d\omega = \int \left(V\frac{\partial \Delta^2 U}{\partial n} - U\frac{\partial \Delta^2 V}{\partial n}\right) d\sigma$$
$$+ 2\int \left(\Delta V\frac{\partial \Delta U}{\partial n} - \Delta U\frac{\partial \Delta V}{\partial n}\right) d\sigma + \int \left(\Delta^2 V\frac{\partial U}{\partial n} - \Delta^2 U\frac{\partial V}{\partial n}\right) d\sigma.$$

Führt man nun in (1) ΔU und ΔV für U und V ein, so ergiebt sich

$$\int (\Delta U\,\Delta^2 V - \Delta V\,\Delta^2 U)\,d\omega = \int \left(\Delta V\frac{\partial \Delta U}{\partial n} - \Delta U\frac{\partial \Delta V}{\partial n}\right) d\sigma.$$

Subtrahirt man diese Gleichung von der vorhergehenden, so folgt die Formel

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{l} \int (U\,\Delta^3 V - V\,\Delta^3 U)\,d\omega \\ = \int \left(V\frac{\partial \Delta^2 U}{\partial n} - U\frac{\partial \Delta^2 V}{\partial n}\right) d\sigma + \int \left(\Delta V\frac{\partial \Delta U}{\partial n} - \Delta U\frac{\partial \Delta V}{\partial n}\right) d\sigma \\ \quad + \int \left(\Delta^2 V\frac{\partial U}{\partial n} - \Delta^2 U\frac{\partial V}{\partial n}\right) d\sigma, \end{array}\right.$$

welche eine weitere Verallgemeinerung des Green'schen Satzes enthält.

Fährt man in der angegebenen Weise fort, so gelangt man zu der folgenden Formel:

$$(G.)\qquad \left\{\begin{array}{l} \int (V\,\Delta^m V - V\,\Delta^m U)\,d\omega \\ = \sum_{\lambda=0}^{m-1} \int \left(\Delta^\lambda V\frac{\partial \Delta^{m-1-\lambda} U}{\partial n} - \Delta^\lambda U\frac{\partial \Delta^{m-1-\lambda} V}{\partial n}\right) d\sigma, \end{array}\right.$$

wo $\Delta^0 U = U$ zu setzen ist.

Die Gleichung (G.) verallgemeinert in interessanter Weise den Green'schen Satz; sie geht in den letzteren für $m = 1$ über; für $m = 2$ liefert unsere Gleichung (G.) die von Mathieu angegebene Formel (2), und für $m = 3$ stimmt sie mit der hier abgeleiteten Gleichung (3) überein. Der Verfasser behält sich vor, auf die Anwendungen dieser Formel (G.) bei nächster Gelegenheit zurückzukommen.

Vita.

Natus sum Augustus Gutzmer in vico Brandenburgensi, cui »Neu-Rodahn« ad »Neustadt a. d. Dosse« nomen est, a. d. IV. Non. Febr. anni h. s. LX patre Augusto matre Minna e gente Schultze quos praematura morte abreptos valde lugeo. Fidei addictus sum evangelicae.

Primis litterarum elementis imbutus scholam quae »Friedrichs-Werdersche Gewerbeschule (Oberrealschule)« appellatur, tunc auspiciis Gallenkampi † viri humanissimi et doctissimi florentem, frequentavi. Maturitatis testimonio instructus autumno anni h. s. LXXXI inter cives universitatis Berolinensis receptus sum ibique per undecim semestria studiis mathematicis operam dedi, morbo diu impeditus. Viros audivi clarissimos: Bruns, Dames, Dilthey, Eichler †, Fuchs, von Giżycki, von Helmholtz, Hettner, Kayser, G. Kirchhoff †, Knoblauch, Kronecker †, Netto, Paulsen, Rammelsberg, F. E. Schultze, Schwendener, von Stein †, Weierstrass, Zeller. Seminarii mathematici per sex semestria fui sodalis.

Omnibus his viris optime de me meritis, imprimis vero professoribus ill. ill. Fuchs, Kronecker †, Weierstrass, qui benignissime me receperunt, nec non viro clarissimo et doctissimo Hamburger, gratias ago quam maximas semperque habebo.

Thesen.

I.

So anschaulich die geometrische Behandlung der singulären Lösungen der Differentialgleichungen ist, so gewährt doch erst die analytische Untersuchung derselben eine befriedigende Einsicht.

II.

Die Entwicklung numerischer Näherungsmethoden für die Lösung von Differentialgleichungen ist mehr als bisher zu berücksichtigen.

III.

In der Behandlung der linearen Differentialgleichungen mit irregulären Integralen wird zunächst nur von der Untersuchung möglichst vieler specieller Fälle ein weiterer Fortschritt zu erwarten sein.

IV.

Die weitere Ausbildung der Potentialtheorie hat sich auf die Functionentheorie zu stützen.

Druck von G. Bernstein in Berlin.